KINEMATIKA FLUIDA

1. osnovni pojmovi kinematike fluida
2. Bernoulli-jeva jednačina

Kinematika fluida

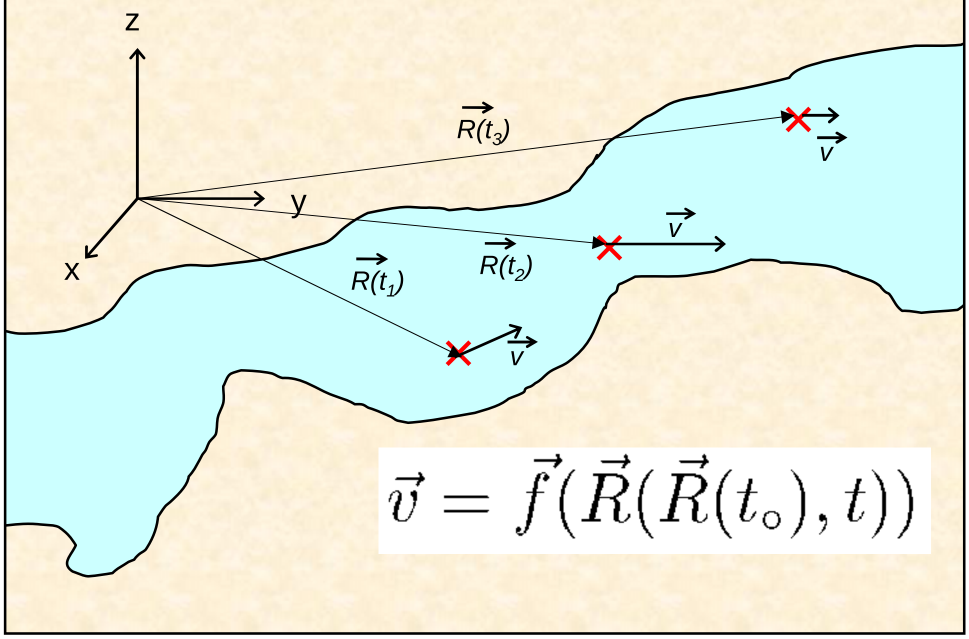
1. proučava kretanje fluida bez obzira na uzroke tog kretanja

2. fluid smatramo kontinuumom

3. koristimo se pojmom čestice fluida: maleni volumen fluida konstantne mase

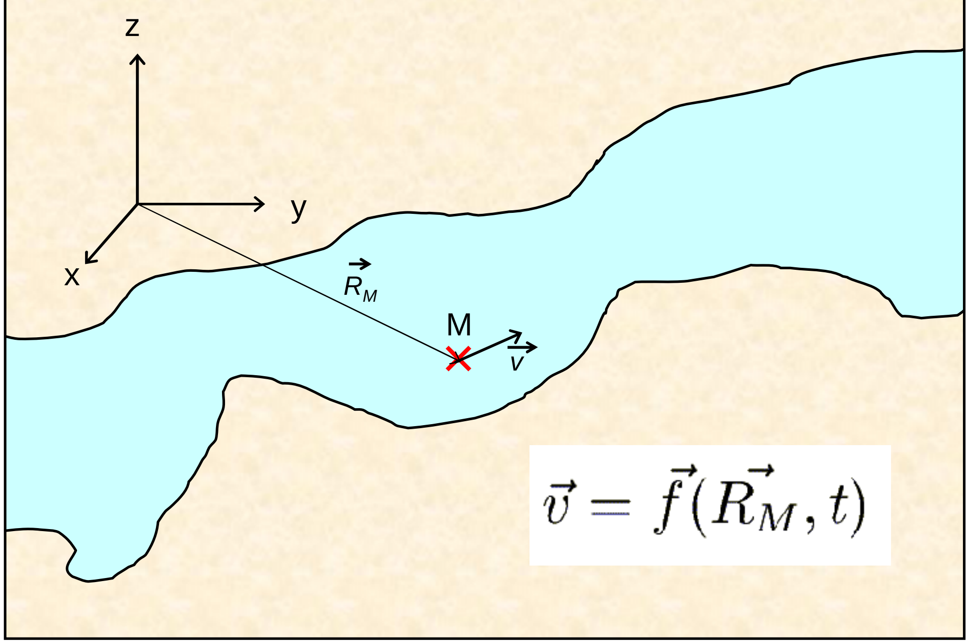
Postoje dva pristupa opisivanju kretanja fluida:

Lagrange-ov pristup (supstancijalni pristup)



$$\vec{v} = \vec{f}(\vec{R}(\vec{R}(t_\circ), t))$$

Euler-ov pristup (lokalni pristup)



$$\vec{v} = \vec{f}(\vec{R_M}, t)$$

Euler-ov pristup 2

tečenje promatramo u jednoj određenoj tački u prostoru:

$$\vec{R} = \vec{R}(x, y, z)$$

fizičke promenljive koje opažamo u toj tački funkcije su koordinata te tačke i vremena, npr. brzina je:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

odnosno, po komponentama

$$v_x = v_x(x, y, z, t)$$
$$v_y = v_y(x, y, z, t)$$
$$v_z = v_z(x, y, z, t)$$

Euler-ov pristup 3

trenutna vrednost brzine je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

a njen smjer

$$\vec{v_\circ} = \frac{v_x}{v}\vec{i} + \frac{v_y}{v}\vec{j} + \frac{v_z}{v}\vec{k}$$

ako se smjer i/ili iznos brzine u datoj tački prostora mijenja u vremenu, kažemo da je tečenje **NESTACIONARNO**.

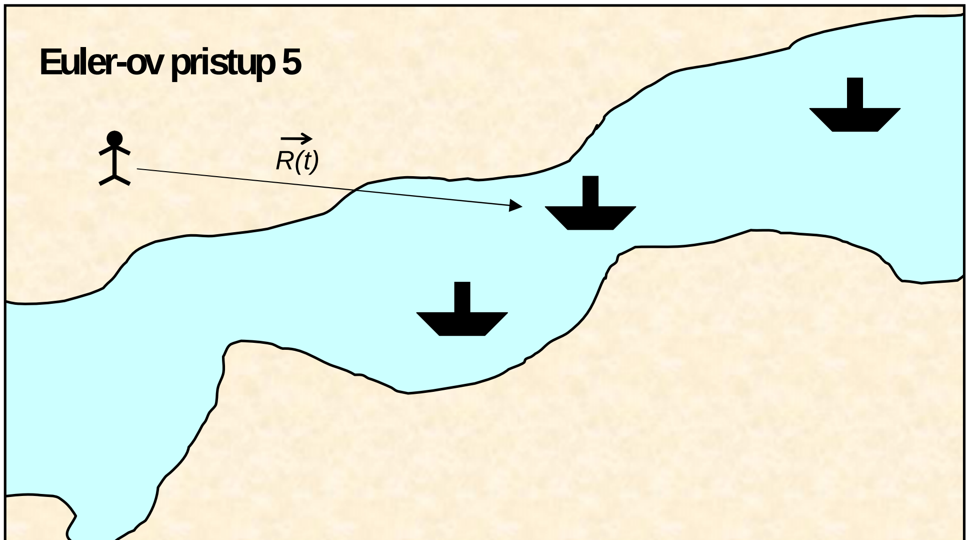
Euler-ov pristup 4

ako je smjer i iznos brzine u datoj tački prostora vremenski nepromjenjiv, kažemo da je tečenje **STACIONARNO**.

Stacionarnost tečenja zavisi od izbora koordinatnog sistema. Ako je to moguće, koordinatni sistem bira se tako da proučavano tečenje u njemu bude stacionarno.

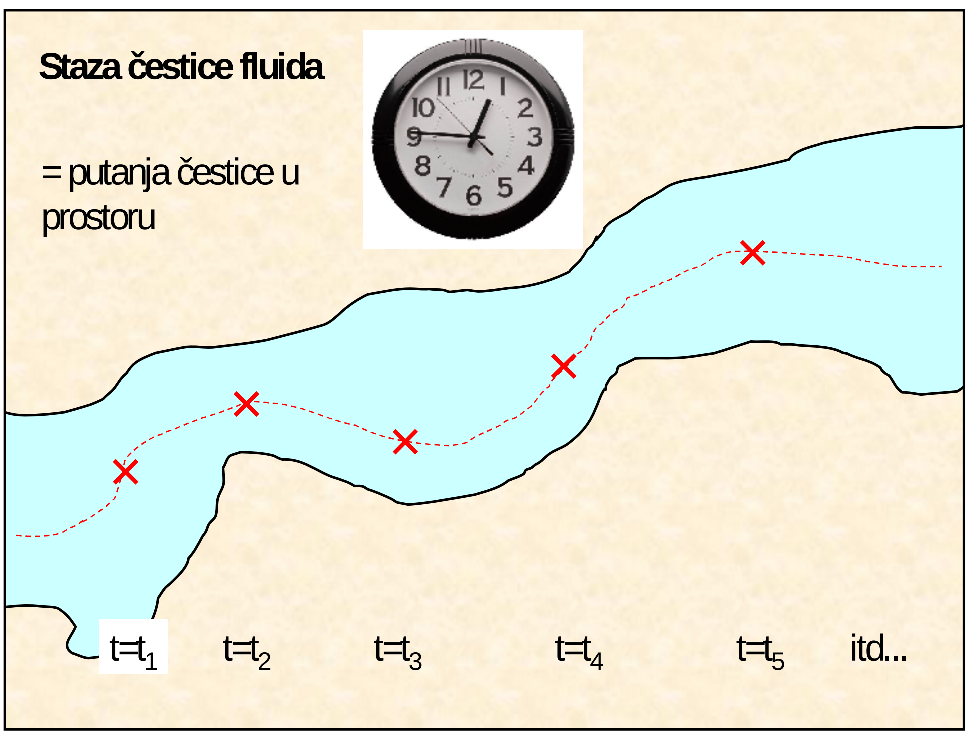
Stacionarnost tečenja dakle nije fizičko svojstvo tečenja, već zavisi od tačke gledišta (=koordinatni sistem).

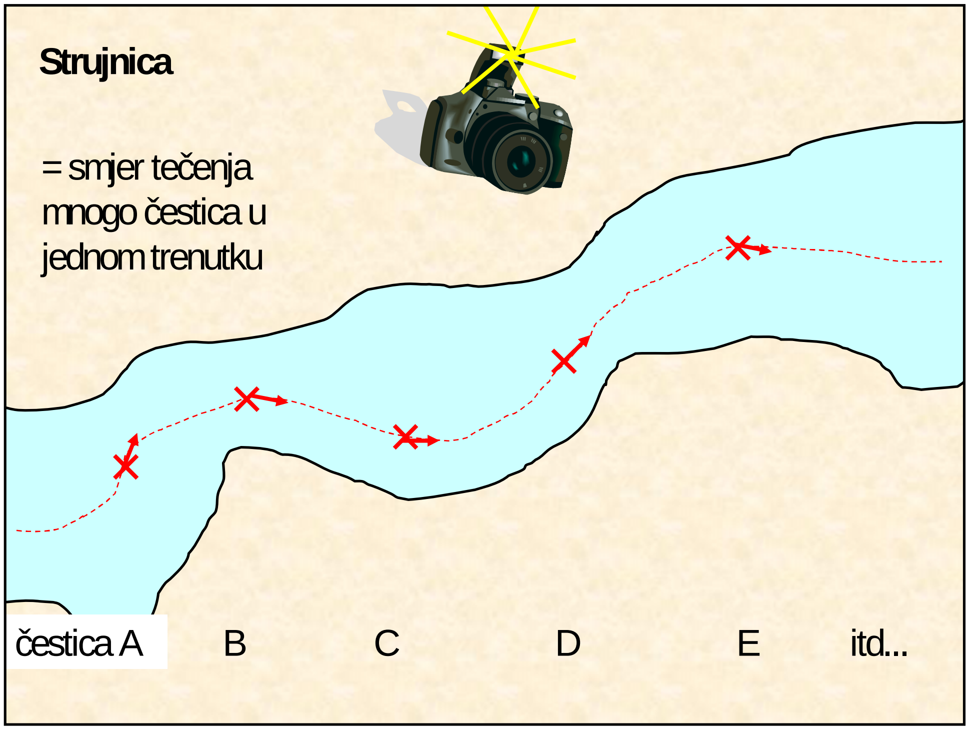
Euler-ov pristup 5

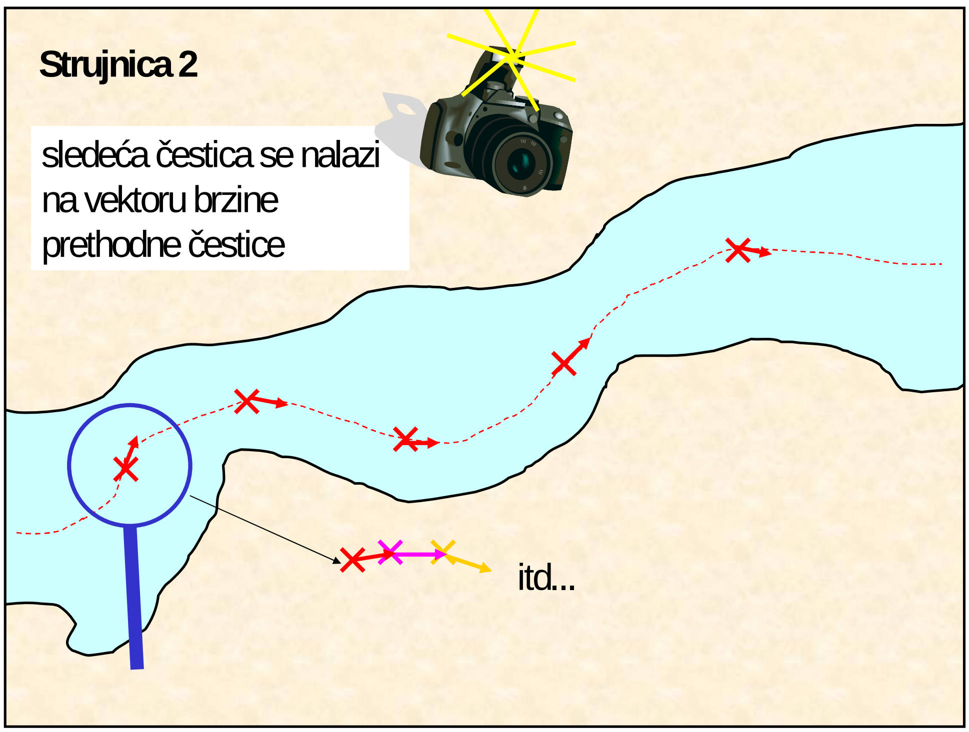


za posmatrača na obali opticanje vode oko broda je **NESTACIONARNO**!


Euler-ov pristup 6
opažač na brodu uvijek vidi istu sliku opticanja vode oko broda. Za njega je to opticanje **STACIONARNO**!


Staza čestice fluida
= putanja čestice u prostoru
$t=t_1$
$t=t_2$
$t=t_3$
$t=t_4$
$t=t_5$
itd...


Strujnica
= smjer tečenja
mnogo čestica u
jednom trenutku
čestica A
B
C
D
E
itd...


Strujnica 2
sledeća čestica se nalazi
na vektoru brzine
prethodne čestice
itd...

Strujnica 3

brzina je tangenta na strujnicu!

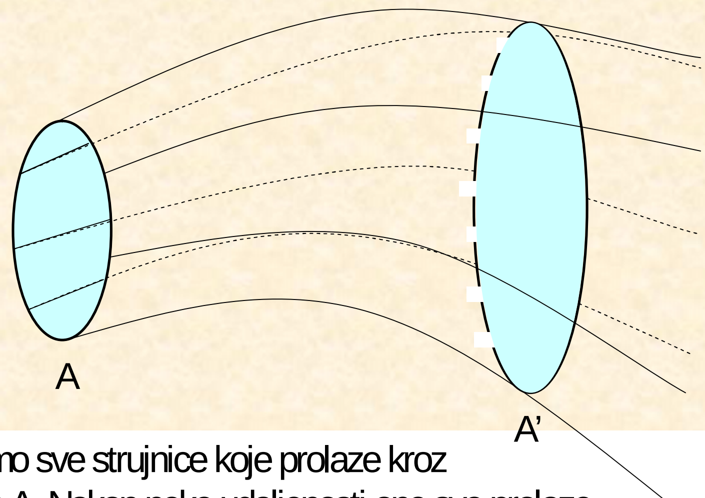
nestacionarno tečenje: strujnice s vremenom menjaju svoj oblik

stacionarno tečenje: strujnice su uvijek iste i poklapaju se sa stazama čestica

praksa: strujnice se čine vidljivima mlazom dima ili ubacivanjem sitnih čestica, mlaza obojene tečnosti i sl. u struju tečnosti

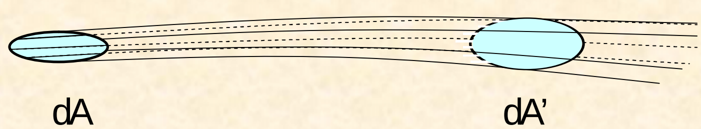
Strujnica 4 - ovako to izgleda na jaguaru!

Strujna cijev



pratimo sve strujnice koje prolaze kroz
ravan A. Nakon neke udaljenosti one sve prolaze
kroz A’. 3D cjevasti oblik koji tako dobijamo nazivamo strujna cijev.

Strujno vlakno



ako gledamo strujnu cijev vrlo malog preseka dA onda je nazivamo strujno vlakno.

strujnica koja prolazi kroz centar strujne cijevi naziva se osa strujne cijevi. **PAZI**, ona je krivja u prostoru!

Euler-ova jednačina za stacionarno tečenje

Polazimo od integralnog oblika kvazi-1D Eulerove jednadžbe za polje sile teže:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz + \int \frac{\partial v}{\partial t} ds = konst.$$

kod stacionarnog tečenja zadnji član lijeve strane isčezava, pa nam ostaje

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = konst.$$

Bernoulli-ova jednačina 1

ako zanemarivo promjene pritiska, Euler-ovu jednačinu za stacionarno strujanje možemo integrirati pa dobijemo:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = konst.$$

Ovo je Bernoulli-jeva jednačina za nestišljiv fluid.
Analizirajmo dimenzije pojedinih članova na lijevoj strani:

$$\frac{v^2}{2} \rightarrow \mathrm{m^2 s^{-2}} = \mathrm{m^2 s^{-2}} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

Bernoulli-ova jednačina 2

$\frac{p}{\rho}$ → $$\frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{kgm}^{-3}} = \frac{\mathrm{Nm}^{-2}}{\mathrm{kgm}^{-3}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

gz → $$\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

uz $\mathrm{N} = \mathrm{kgms}^{-2}$

svi članovi predstavljaju energiju po jedinici mase!

Konstanta na desnoj strani je **ukupna energija fluida.**

Bernoulli-ova jednačina 3

$\frac{v^2}{2}$ predstavlja kinetičku energiju fluida

$\frac{p}{\rho}$ predstavlja unutrašnju energiju fluida (zbog pritiska)

gz predstavlja potencijalnu energiju fluida

B.J. je u stvari zakon očuvanja energije za tečnosti!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti

B.J. za nestisljivi fluid podijelimo sa g:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = z_\circ$$

svi članovi sad imaju dimenzije dužine i nazivaju se visine:

brzinska v. + v. pritiska + geodetska v. = v. energetskog horizonta (energetske linije)

v. pritiska + geodetska v. = pijezometarska v.!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti

energetski karakter je skriven. Možemo probati ovako:

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{G}_\circ} \qquad \mathrm{G}_\circ = \mathrm{g}\cdot 1\,\mathrm{kg}$$

ovo je energija po težini jedinične mase (1 kg)!

ovaj oblik najčešće se koristi jer se pijezometarska visina može direktno mjeriti!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 3

kako je gustina konstantna (početna pretpostavka!) i z_o konstanta, možemo pisati

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

gdje su 1 i 2 bilo koje dvije tačke na strujnici.

Tu je problem: B.J. važi za jednu strujnicu!
Praksa: "ignorišemo" problem i u B.J. uvrštavamo srednje vrijednosti odgovarajućih veličina!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 4

najveću grešku unosi srednja vrijednost brzine (pritisak i visina se sporije mijenjaju). Probajmo ocijeniti tu grešku. Polazimo od toka kinetičke energije kroz strujnu cijev:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{dm}{dt}\frac{v^2}{2}$$

protok mase je dat sa

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho dAv}{dt}$$

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 5

odnosno

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\rho}{2} v^3 dA$$

za cijeli presjek toka, to moramo integraliti po površini presjeka:

$$\frac{d}{dt}(E_k) = \frac{\rho}{2} \int_A v^3 dA$$

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 6

račun sa srednjom vrijednošću brzine da je

$$\frac{d}{dt}(\bar{E}_k) = \frac{\rho}{2} \bar{v}^3 A$$

matematički se može dokazati da uvijek važi:

$$\int_A v^3 dA > \bar{v}^3 A$$

Corioliss-ov koeficijent

odnos

$$\delta = \frac{\int_A v^3 dA}{\bar{v}^3 A} > 1$$

naziva se Coriollis-ov koeficijent.

Da izbjegnemo greške zbog usrednjavanja, moramo modifikovati B.J:

$$\delta \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = z_\circ$$

Corioliss-ov koeficijent 2

odnosno

$$\delta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \delta_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

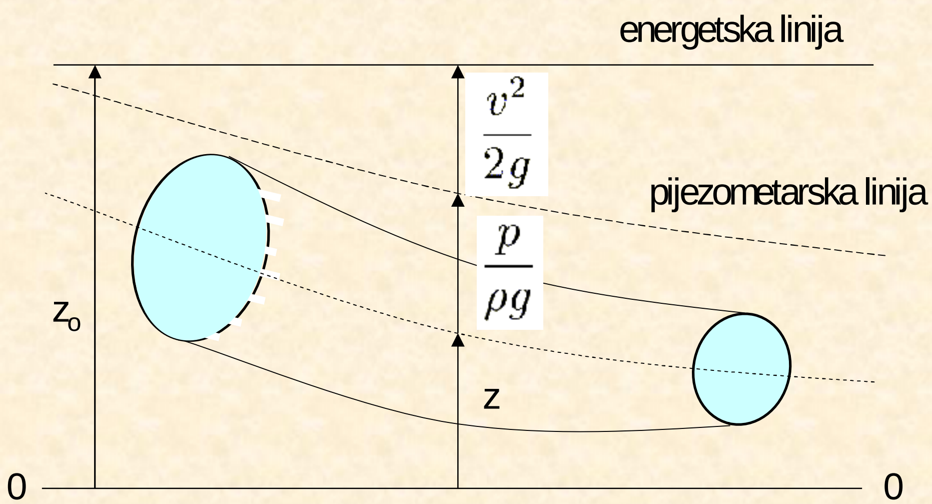
Coriollis-ov koeficijent u realnim situacijama moramo odrediti iz poznatih podataka o toku na mjestu za koje taj koeficijent tražimo!

Statička granica Bernoulli-jeve jednačine

ako se strujanje zaustavi, B.J. prelazi u jednačinu hidrostatičke ravnoteže:

$$p = \rho g(z_\circ - z)$$

Korišćenje Bernoulli-jeve jednačine



visina energetske linije z_o je konstantna (idealna tečnost!).
Za nju se često puta koriste i oznake h ili H.

z_o se mjeri od zgodno odabrane referentne ravni (0--0)
koja obično odgovara najnižoj tački problema. Za nju je z=0.

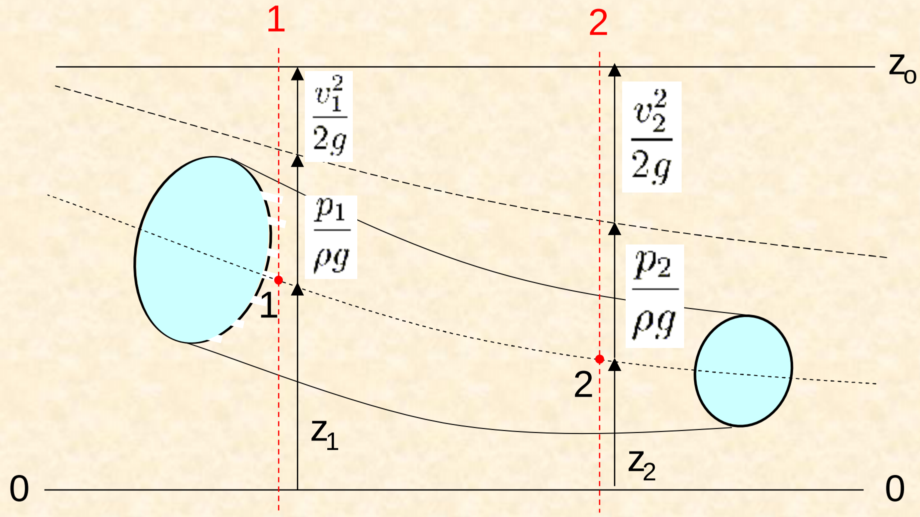
Često puta se kao referentna ravan uzima morska površina

$\frac{v^2}{2g}$ predstavlja kinetičku energiju tečnosti (brzinska visina)

$\frac{p}{\rho g}$ je doprinos pritiska potencijalnoj energiji tečnosti (visina pritiska)

z je dio potencijalne energije tečnosti zbog njenog položaja (geodetska visina)

pijezometarska visina= v. pritiska + geodetska visina



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Bernoulli-jeva jednačine za realne fluide

idelani fluidi ne opisuju dobro realne situacije. Svi realni fluidi imaju neku viskoznost i nju moramo uzeti u obzir.

Viskozna sila dana je proizvodom tangencijalnog naprezanja i tangencijalne površine:

$$F_{vis} = \tau A$$

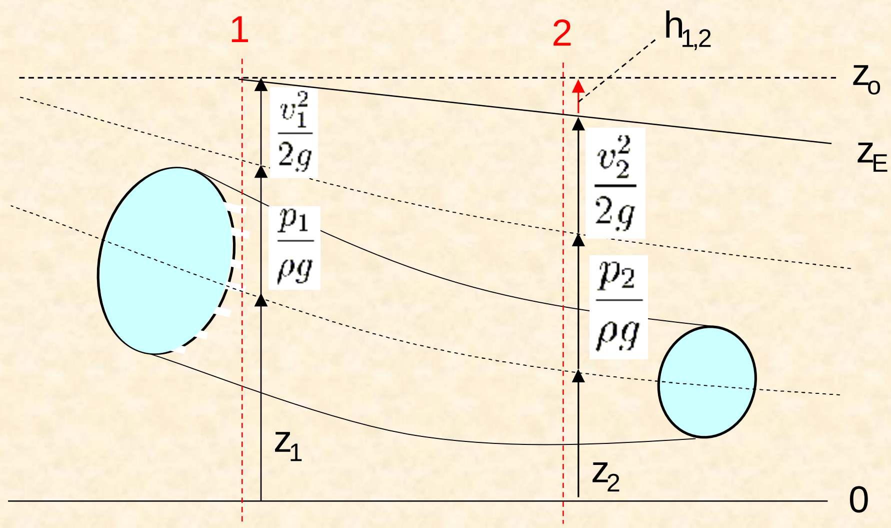
kod čestice fluida viskozna sila djeluje na njene bočne strane:

$A = Ods$ pa je $dF_{vis} = \tau O ds$

zbog toga moramo B.J. dodati član koji opisuje energiju potrošenu viskoznim trenjem. On je jednak promjeni "pritiska" po jedinici mase fluida (kao i postojeći član dp/ρ):

$$h_{vis} = \frac{dF_{vis}}{\rho dA}$$

viskozno trenje kao i svako drugo trenje troši mehaničku energiju pretvarajući ju u toplotu, pa se ona za nas gubi. Posedica toga je da ukupna energija realnog fluida nije sačuvana, već se gubi u smjeru tečenja.



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{1,2}$$

član $h_{1,2}$ opisuje gubitak energije viskoznog fluida između tačaka 1 i 2 zbog unutrašnjeg trenja u fluidu.

Određivanje gubitaka

1. ako je proticaj konstantan (=stacionarno strujanje!) na mjestima 1 i 2 izmjerimo pijezometarsku visinu h_p:

$$h_p = \left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$$

2. pomoću jednačine kontinuiteta nađemo brzine ($v_1A_1=v_2A_2=Q$)
3. pomoću B.J. nađemo gubitak:

$$h_{1,2} = \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)$$

odnosno, uz upotrebu pijezometarske visine:

$$h_{1,2} = \left(\frac{v_1^2}{2g} + h_{p1}\right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + h_{p2}\right)$$

ako se tečenje odvija kroz cijev konstantnog presjeka, brzina je svugdje ista pa imamo još jednostavniju formulu:

$$h_{1,2} = h_{p1} - h_{p2}$$

gubitak energije po jedinici dužine toka naziva se **energetski gradijent** ili **energetski pad:**

$$I_e = \frac{h_{1,2}}{l}$$

pad pijezometarske linije po jedinici dužine toka naziva se **pijezometarski gradijent (pad)** ili **hidraulički gradijent:**

$$I_p = \frac{h_{p1} - h_{p2}}{l} = \tan\alpha$$

kod otvorenog toka postoji slobodna površina i na njoj je pritisak svugde jednak atmosferskom:

$$p_1 = p_2 = p_a$$

površina fluida je jednaka pijezometarskoj liniji, a B.J. postaje :

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_{1,2}$$

ako je tečenje jednoliko, ovo se još pojednostavi:

$$h_{1,2} = z_1 - z_2$$

da bi tečenje bilo jednoliko (v1=v2) i presjek toka (dubina i širina) mora biti konstantan. U takvom slučaju koristi se i pojam topografskog gradijenta *i* koji predstavlja nagib dna korita u kojem se tok odvija, jer je slobodna površina paralelna sa dnom.