Mjerljive funkcije

Andjela Mijanovic

April 3, 2020

Def: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom i $f : X \to \overline{R}$ (sa $\overline{R}$ označavamo skup $R \cup \{-\infty, +\infty\}$). Kažemo da je f mjerljiva funkcija ako je ispunjen jedan od četiri sljedeća medjusobno ekvivalentna uslova:
i) za svako $c \in R$ skup $\{x \in R : f(x) < c\}$ je mjerljiv;
ii) za svako $c \in R$ skup $\{x \in R : f(x) \leq c\}$ je mjerljiv;
iii) za svako $c \in R$ skup $\{x \in R : f(x) > c\}$ je mjerljiv;
iv) za svako $c \in R$ skup $\{x \in R : f(x) \geq c\}$ je mjerljiv.

1. ## Zadatak 1.

   Dokazati da ako je funkcija $f : R \to R$ neprekidna da je tada f i mjerljiva.
   Rešenje:

   Neka je $A = \{x \in R : f(x) < c\}$, $c \in R$. Treba dokazati da je A mjerljiv, tj. da pripada Borelovoj sigma algebri za svako $c \in R$. Dakle, treba pokazati da je skup A otvoren za svako $c \in R$. Primijetimo da $A = f^{-1}((-\infty, c))$. Kako je skup $(-\infty, c)$ otvoren i funkcija f je neprekidna zaključujemo da je i skup A otvoren ako inverzna slika otvorenog skupa pri neprekidnom preslikavanju.

2. ## Zadatak 2.

   Neka je f_n niz mjerljivih funkcija. Dokazati, da skup tačaka u kojima $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ postoji i konačan je, čini mjerljiv skup.
   Rešenje: Skup tačaka u kojima postoji $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ i konačan je možemo da opišemo kao

$$A = \{x \in X : \limsup f_n(x) - \liminf f_n(x) = 0\}$$

Uvedimo pomoćnu funkciju $h(x) = \limsup f_n(x) - \liminf f_n(x)$. Tada se naš skup može zapisati kao

$$A = \{x \in X : h(x) = 0\} = h^{-1}(-\infty, 0] \cap h^{-1}[0, +\infty).$$

Zadatak ćemo završiti ako dokažemo da je h mjerljiva funkcija, jer u tom slučaju, direktno iz definicije će slijediti da je naš skup presjek dva mjerljiva skupa, dakle mjerljiv skup.
Da bi dokazali da je h mjerljiva dovoljno je pokazati da su funkicije $f(x) = \limsup f_n(x)$ i $g(x) = \liminf f_n(x)$ mjerljive.
Trebamo samo znati da je $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{k\geq n} f_k(x)$ i $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$.
Mjerljivost funkcije f slijedi na osnovu:

$$\{x \in X : \sup_{k\geq n} f_k(x) > c\} = \bigcup_{k\geq n} \{f_k(x) > c\}. \tag{1}$$

Na desnoj strani u (1) imamo prebrojivu familiju mjerljivih skupova, jer $\{f_k\}$ su mjerljive funkcije. Pa je skup na lijevoj strani u (1) mjerljiv, tj. $g_n(x) = \sup\limits_{k\geq n} f_k(x)$ je mjerljiva.

Kako je :

$$f(x) = \limsup f_n(x) = \inf_{n\geq 1} g_n = -\sup_{n\geq 1}(-g_n(x)). \tag{2}$$

Iz (2) slijedi da je f mjerljiva funkcija kao kompozicija mjerljivih funkcija.
Analogno se dokazuje da je funkcija g mjerljiva.
Zaključujemo da je h mjerljiva funkcija.

3. ## Zadatak 3.

Neka je $\mathfrak{A}$ neka σ-algebra na R i neka je $\mathfrak{M} = \{A \times R | A \in \mathfrak{A}\}$. Dokazati da je:
a) $\mathfrak{M}$ σ-algebra.
b) Da li su funkcije $f(x,y) = x + 1$ i $g(x,y) = y^2$ $\mathfrak{M}$-mjerljive?
Resenje: a) Uraditi za vježbu.

b) Podsjetimo se prvo definicije mjerljive funkcije, a potom uočimo da je

$$\{(x,y) \in R^2 : f(x,y) < c\} = \{(x,y) \in R^2 : x < c - 1\} = (-\infty, c-1) \times R.$$

Ovakav skup pripada familiji $\mathfrak{M}$ za svako c, akko svi intervali oblika $(-\infty, c-1)$ pripadaju σ- algebri $\mathfrak{A}$. Medjutim, imamo

$$[a,b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a) \in \mathfrak{A}$$

i $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a + \frac{1}{n}, b)$, pa tada $\mathfrak{A}$ sadrži sve otvorene intervale. Time $\mathfrak{A}$ sadrži sve otvorene skupove, jer svaki otvoreni skup se može prikazati kao najviše prebrojiva unija otvorenih intervala, a time i sve Borelove. Tako zaključujemo da je f mjerljiva, ako i samo ako je $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$.
Što se tiče funkcije g, stvari stoje drugačije.
Možemo konstatovati da je skup $\{(x,y) \in R^2 : g(x,y) < c\}$, prazan za $c \leq 0$, (time naravno pripada $\mathfrak{M}$), odnosno jednak je $R \times (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$, za $c > 0$. Za bilo koje c ovakav skup ne pripada $\mathfrak{M}$, jer bi, u tom slučaju, druga koordinata morala da bude slobodna. Dakle, nikad nije mjerljiva.

4. ## Zadatak 4.

Neka je $x \in [0,1)$ i $x = 0, n_1 n_2 n_3 ...$, gdje su n_i - cifre i $f(x) = \max\limits_i n_i$. Dokazati da je:
a) f mjerljiva; b) $f(x) = \limsup\limits_{i \to \infty} n_i$ mjerljiva.
Resenje:

Pokažimo prvo da je $f(x) = 9$ skoro svuda na $[0,1)$.
Treba pokazati da je $\mu(\{x \in [0,1) : f(x) \neq 9\}) = 0$. Da bi to pokazali, konstrujišimo skup F - skup svih brojeva sa $[0,1)$ koji u svom dekadnom zapisu ne sadrže cifru 9. Tada je:

$$F_1 = [0,1) \setminus [0.9, 1)$$
$$F_2 = F_1 \setminus [0.09, 0.1) \cup [0.19, 0.2) \cup ... \cup [0.89, 0.9)$$

$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$. Pa je

$$\mu(F) = 1 - \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{9^{n-1}} \Delta_{nk}) = 1 - \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^{n-1}}{10^n} = 1 - 1 = 0.$$

Slijedi da je $f(x) = 9$ s.s na $[0,1)$ pa je f mjerljiva na osnovu zadatka 1.
b) Uvedimo pomoćne funkcije $f_i(x) = n_i$. Funkcije f_i su mjerljive (na osnovu a), pa je f mjerljiva na osnovu zadatka 2.

5. ## Zadatak 5.

Ako je funkcija f^3 mjerljiva na skupu E, dokazati da je tada i funkcija f mjerljiva na E.
Resenje: Ako je funkcija $f^3(x)$ mjerljiva na E, tada je za svako $c \in R$ skup

$$\{x \in E : f^3(x) > c\}$$

mjerljiv. Kako je

$$\{x \in E : f^3(x) > c\} = \{x \in E : f(x) > \sqrt[3]{c}\}.$$

Sijedi da je skup $\{x \in E : f(x) > \sqrt[3]{c}\}$ mjerljiv za proizvoljno c, odnosno slijedi da je funkcija $f(x)$ mjerljiva.

6. Zadatak 6.

Pokazati da ako je funkcija f^2 mjerljiva na E, funkcija f ne mora biti mjerljiva.

Resenje:

Neka je A neki nemjerljiv podskup u R. Defunišimo funkcija f na sl. način:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in A; \\ -1, & \text{ako } x \in A^C; \end{cases}$$

Tada je $\{x \in R : f(x) > 0\} = A$ i A je nemjerljiv skup, slijedi da funkcija $f(x)$ nije mjerljiva.
S druge strane, $f^2(x) = 1$ za svako $x \in R$, pa na osnovu zad.1 funkcija f^2 je mjerljiva.

7. Zadatak 7.

Pokazati da ako je funkcija $f(x)$ mjerljiva na svakom segmentu $[\alpha, \beta]$, gdje je $a < \alpha < \beta < b$, funkcija $f(x)$ je mjerljiva na $[a, b]$.

Rešenje: Odaberimo niz tačaka $\alpha_1 > \alpha_2 > ...$ koji teži ka a i niz tačaka $\beta_1 < \beta_2 < ...$ koji teži ka b. Jasno je da je

$$(a, b) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} [\alpha_i, \beta_i].$$

Kako je $f(x)$ mjerljiva na proizvoljnom $[\alpha_i, \beta_i]$ to za svako $c \in R$ skup

$$E_i = [\alpha_i, \beta_i] \cap \{x \in R : f(x) > c\}$$

mjerljiv. Kako je

$$\bigcup_i E_i = (a, b) \cap \{x \in R : f(x) > c\}$$

to je skup $(a, b) \cap \{x \in R : f(x) > c\}$ mjerljiv za proizvoljno $c \in R$.
Slijedi da je $f(x)$ mjerljiva na (a, b). Kako se segment $[a, b]$ razlikuje od intervala (a, b) samo na skupu mjere 0, to je $f(x)$ mjerljiva na $[a, b]$.

Zadatak 8.

Ako je funkcija $f : [a, b] \to R$ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b), dokazati da je $f'(x)$ mjerljiva na (a, b).

Rešenje: Posmatrajmo funkciju

$$\phi_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

ona je definisana i mjerljiva na $[a, b - \frac{1}{n}]$.
$\lim\limits_{k \to \infty} \phi_k(x) = f'(x)$ postoji za sve $x \in (a, b - \frac{1}{n}]$, pa na osnovu zadatka 2 slijedi da je $f'(x)$ mjerljiva na $(a, b - \frac{1}{n}]$. Kako je

$$(a, b) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$$

to je funkcija $f'(x)$ mjerljiva na (a, b).