POGLAVLJE 9

TESTIRANJE HIPOTEZA O ARITMETIČKOJ SREDINI I PROPORCIJI

9.1 TESTIRANJE HIPOTEZA: UVOD

- Dvije hipoteze
- Oblasti odbacivanja i neodbacivanja
- Dva tipa grešaka
- Smjerovi (oblici) testa

Dvije hipoteze

Definicija

Nulta hipoteza je tvrđenje (ili iskaz) o nekom parametru osnovnog skupa koji se smatra istinitim sve dok se ne pokaže suprotno.

Alternativna hipoteza je tvrđenje o nekom parametru osnovnog skupa koje će biti istinito ako je nulta hipoteza neistinita.

Oblasti odbacivanja i neodbacivanja

Slika 9.1 Oblasti odbacivanja i neodbacivanja u sudskom procesu.

Dva tipa grešaka

Tabela 9.1 Četiri moguća ishoda u sudskom procesu

		Stvarno stanje	
		Osoba nije kriva	**Osoba jeste kriva**
Odluka suda	Osoba nije kriva	Ispravna odluka	Greška II vrste ili β greška
	Osoba jeste kriva	Greška I vrste ili α greška	Ispravna odluka

Dva tipa grešaka

Definicija

Greška I vrste se javlja kada se istinita nulta hipoteza odbaci. Vrijednost α predstavlja vjerovatnoću javljanja greške ove vrste; odnosno,

$$\alpha = P(H_0 \text{ se odbacuje} \mid H_0 \text{ je istinita})$$

Vrijednost α predstavlja ***nivo značajnosti*** testa.

Dva tipa grešaka

Definicija

Greška II vrste se javlja kada se neistinita nulta hipoteza ne odbaci. Vrijednost β predstavlja vjerovatnoću javljanja greške II vrste; odnosno,

$$\beta = P\ (H_0 \text{ se ne odbacuje } |\ H_0 \text{ je neistinita})$$

Vrijednost $1 - \beta$ se naziva ***jačina testa*** i predstavlja vjerovatnoću da se greška II vrste ne javi.

Tabela 9.2 Četiri moguća ishoda za testiranje hipoteza

		Stvarno stanje	
		H_0 je istinita	**H_0 nije istinita**
Odluka	H_0 se ne odbacuje	Ispravna odluka	Greška II vrste ili β greška
	H_0 se odbacuje	Greška I vrste ili α greška	Ispravna odluka

Smjerovi (oblici) testa

Definicija

Dvostrani test ima oblast odbacivanja na oba kraja, ***lijevostrani test*** ima oblast odbacivanja na lijevom kraju, a ***desnostrani test*** ima oblast odbacivanja na desnom kraju krive raspodjele.

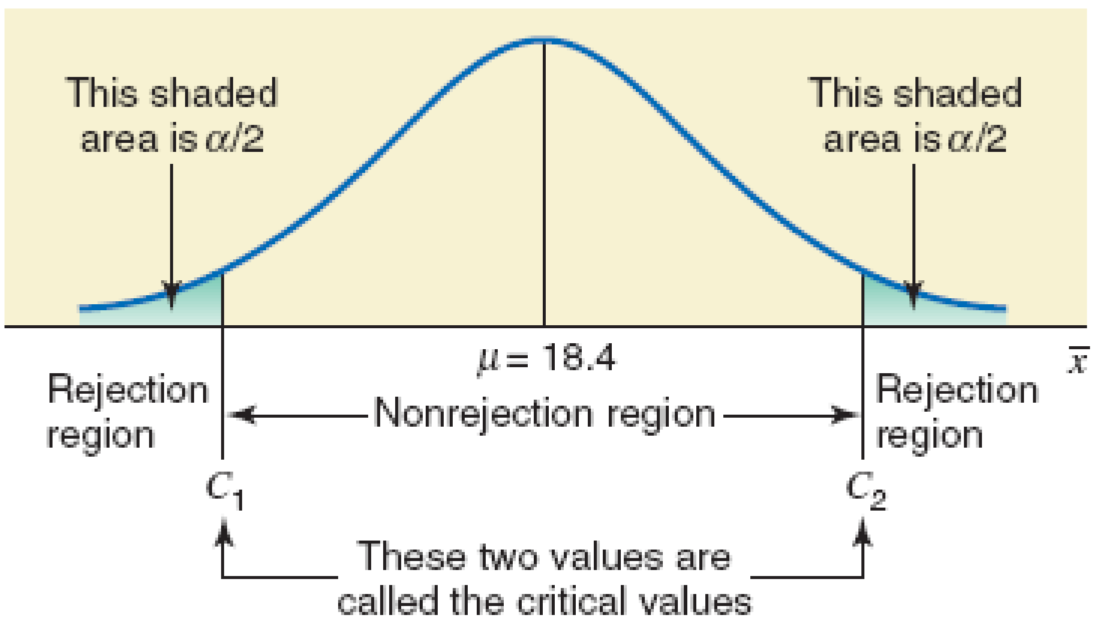
Dvostrani test

- Neka je μ težina torbi za sadašnje učenike šestih razreda u Njujorku. Dvije moguće odluke su
  - $H_0 : \mu = 18.4$ funti (Prosječna težina torbi za učenike šestih razreda u Njujorku se nije promijenila)
  - $H_1 : \mu \neq 18.4$ funti (Prosječna težina torbi za učenike šestih razreda u Njujorku se promijenila)

Dvostrani test

- Da li je test dvostrani ili jednostrani određuje znak u alternativnoj hipotezi.
- Ako se u alternativnoj hipotezi nalazi znak *nije jednako* ($\neq$), onda je taj test dvostrani.

Slika 9.2 Dvostrani test.



Lijevostrani test

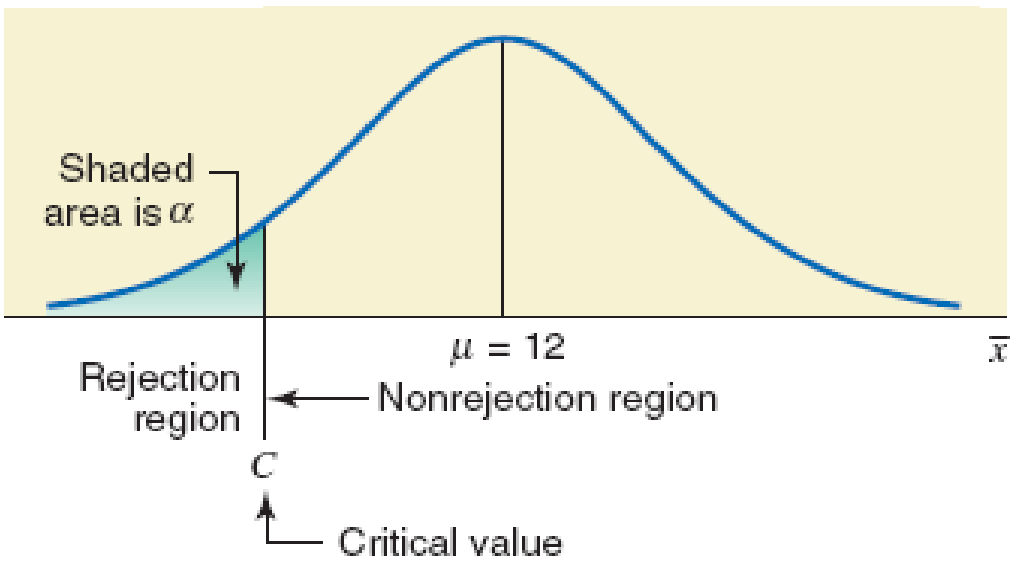
- Neka je μ prosječna količina soka u svim limenkama. Dvije moguće odluke su
  - $H_0 : \mu = 12$ unci (Prosjek je jednak 12 unci)
  - $H_1 : \mu < 12$ unci (Prosjek je manji od 12 unci)

Lijevostrani test

U ovom slučaju nultu hipotezu možemo da napišemo i kao $H_0 : \mu \geq 12$. Ovo neće uticati na rezultat testa sve dok se u H_1 nalazi znak *manje od* (<).

Kada je u alternativnoj hipotezi znak *manje od* (<), test je uvijek lijevostran.

Slika 9.3 Lijevostrani test.



Desnostrani test

- Neka je μ trenutna prosječna cijena domova u ovom gradu. Dvije moguće odluke su
  - $H_0 : \mu = \$461{,}216$ (Trenutna prosječna cijena domova u ovom gradu nije veća od \$461,216)
  - $H_1 : \mu > \$461{,}216$ (Trenutna prosječna cijena domova u ovom gradu je veća od \$461,216)

Desnostrani test

Kada alternativna hipoteza sadrži znak veće od (>), test je uvijek desnostrani.

Slika 9.4 Desnostrani test.

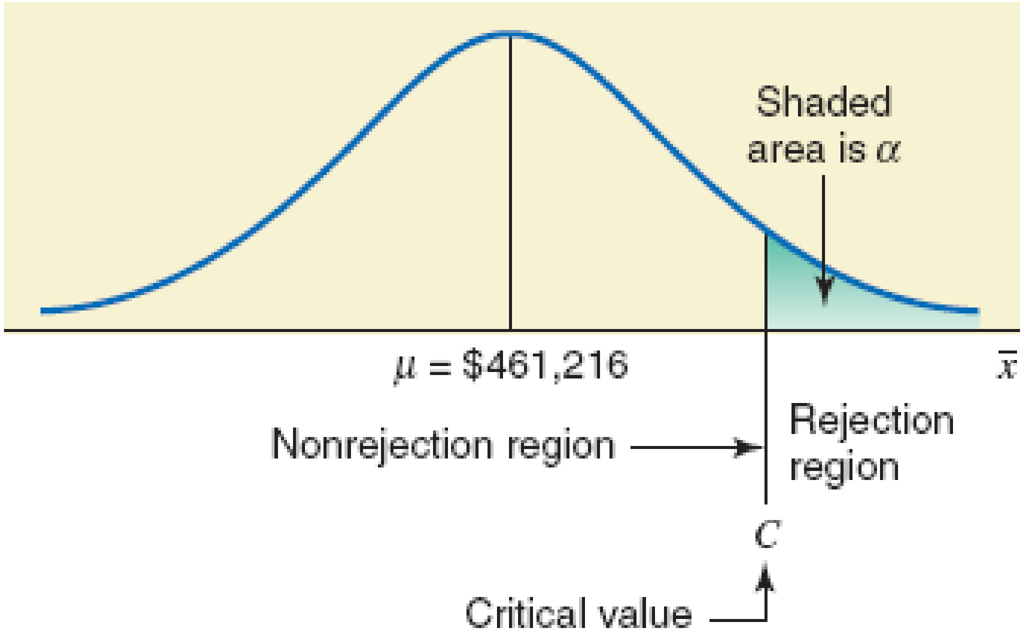


Tabela 9.3 Znaci u H_0 i H_1 i smjerovi testa

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Znak u nultoj hipotezi H_0	$=$	$=$ ili $\geq$	$=$ ili $\leq$
Znak u alternativnoj hipotezi H_1	$\neq$	$<$	$>$
Odbast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Dva postupka

Dva postupka testiranja hipoteza

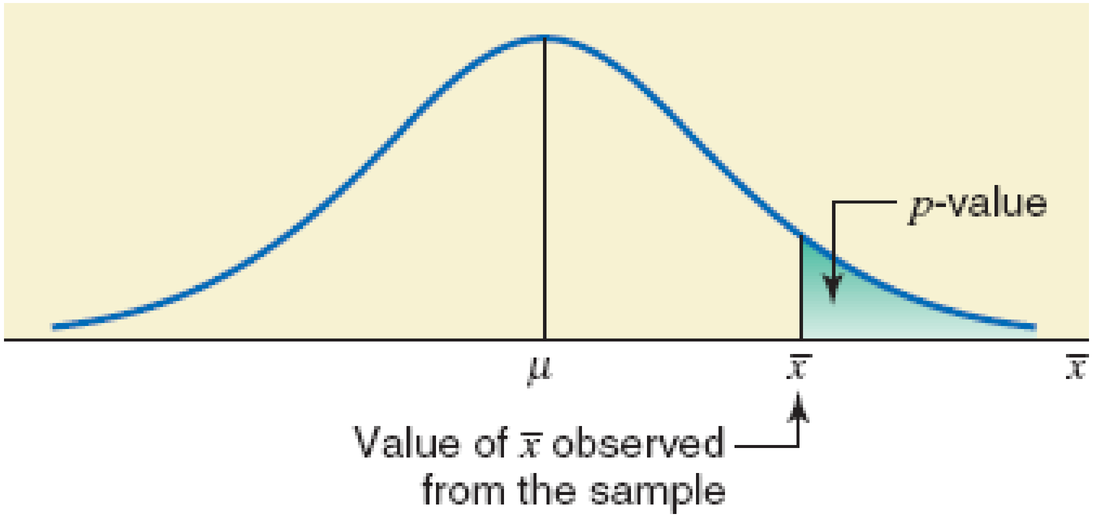
1. Pristup zasnovan na p-vrijednosti
2. Pristup zasnovan na kritičnoj vrijednosti

p-vrijednost

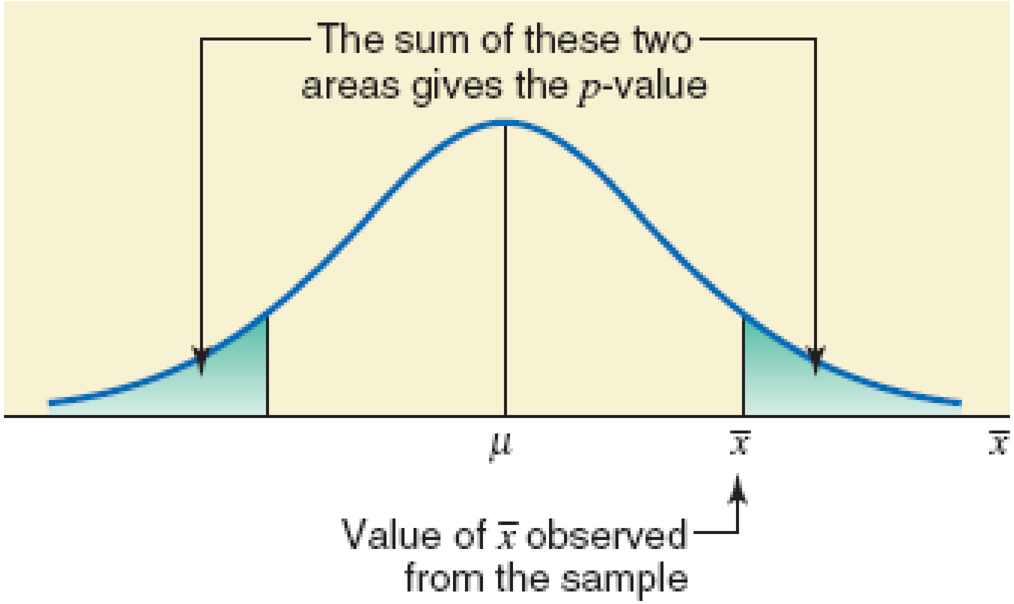
Definicija

Pod pretpostavkom da je nulta hipoteza tačna, p-vrijednost može da se definiše kao vjerovatnoća da statistika uzorka (kao što je aritmetička sredina uzorka) odstupa od hipotetičke vrijednosti parametra u smjeru alternativne hipoteze, barem toliko koliko i realizovana vrijednost statistike uzorka u izabranom uzorku. Napomenimo da ako je ***p*–vrijednost** manja od nivoa značajnosti, nulta hipoteza se odbacuje.

Slika 9.5 *p*–vrijednost za desnostrani test.

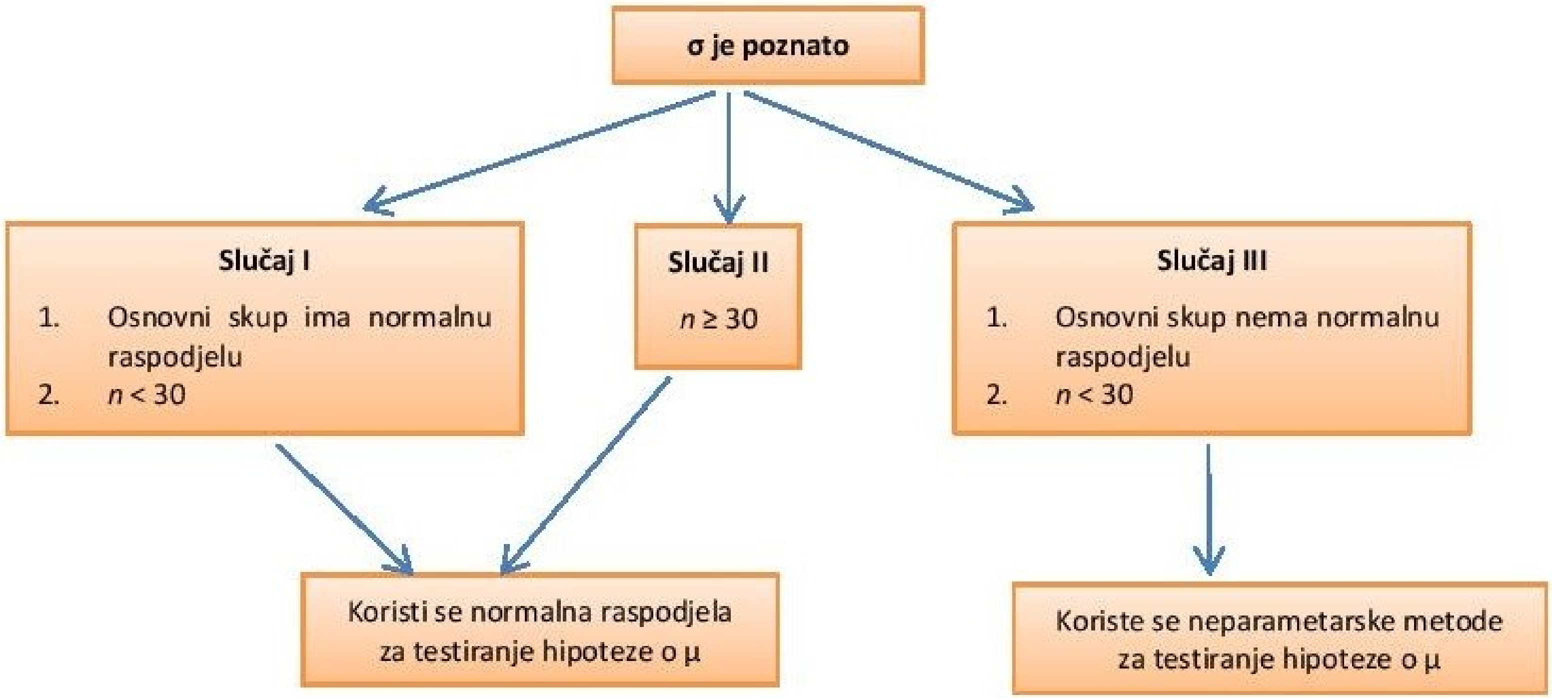


Slika 9.6 *p*–vrijednost za dvostrani test.



9.2. TESTIRANJE HIPOTEZA O μ: σ JE POZNATA

Tri moguća slučaja



TESTIRANJE HIPOTEZA O μ: σ JE POZNATA

Etape u testiranju hipoteze primjenom pristupa zasnovanog na kritičnoj vrijednosti

1. Formulisanje nulte i alternativne hipoteze.
2. Izbor raspodjele koja će se koristiti.
3. Određivanje oblasti odbacivanja i neodbacivanja.
4. Izračunavanje vrijednosti statistike testa.
5. Donošenje odluke.

Izračunavanje z vrijednosti za $\bar{x}$

Kada u testiranju hipoteze o μ koristimo normalnu raspodjelu, onda ***vrijednost z,*** za vrijednost $\bar{x}$ u izabranom uzorku, izračunavamo na sledeći način:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad \textbf{gdje} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Izračunatu vrijednost z na osnovu $\bar{x}$ iz izabranog uzorka, nazivamo i ***realizovana vrijednost statistike z testa***.

Pravila z testa hipoteza o μ: σ JE POZNATA

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Nulta hipoteza H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \geq \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \leq \mu_0$
Alternativna hipoteza H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
Kritična vrijednost	$z_{\frac{\alpha}{2}}$	$-z_\alpha$	z_α
Statistika testa	$z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$		
Pravilo odbacivanja H_0	$\lvert z \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_\alpha$	$z > z_\alpha$
Oblast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Primjer 9-1

Telefonska kompanija TIV pruža usluge međunarodnih razgovora u jednoj oblasti. Na osnovu raspoloživih informacija utvrđeno je da je prosječna dužina međunarodnih razgovora koji su preko ove kompanije obavljeni u 2009. godini bila 12.44 minuta. Uprava kompanije je željela da provjeri da li se prosječna dužina aktuelnih telefonskih razgovora razlikuje od 12.44 minuta. U uzorku od 150 takvih razgovora prosječna dužina iznosila je 13.71 minuta. Standardna devijacija svih razgovora je 2.65 minuta. Da li na nivou značajnosti od 2%, možete da zaključite da se prosječna dužina aktuelnih međunarodnih razgovora razlikuje od 12.44 minuta?

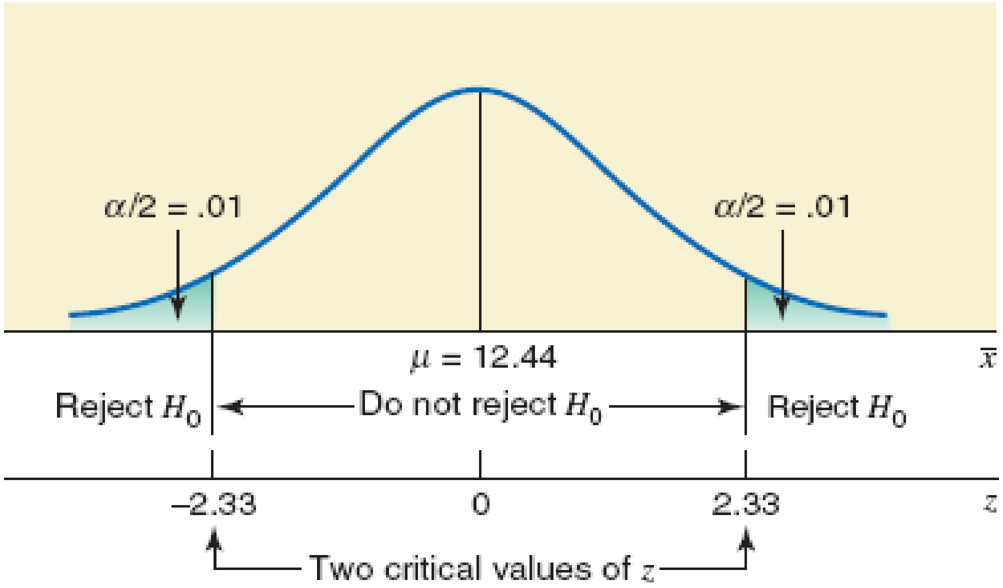
Primjer 9-1: Rješenje

- Korak 1: $H_0 : \mu = 12.44 \quad H_1 : \mu \neq 12.44$
- Korak 2: Standardna devijacija skupa σ je poznata, a uzorak veliki (n > 30). Po centralnoj graničnoj teoremi, koristićemo normalnu raspodjelu da sprovedemo test.

Primjer 9-1: Rješenje

- Korak 3: $\alpha = 0.02$
- Znak ≠ u alternativnoj hipotezi ukazuje da je test dvostrani
- Površina na svakom kraju = α / 2= 0.02 / 2 = 0.01
- Vrijednosti z za dvije kritične tačke su -2.33 i 2.33

Slika 9.9



α/2 = .01
α/2 = .01
μ = 12.44
x̄
Reject H_0
Do not reject H_0
Reject H_0
−2.33
0
2.33
z
Two critical values of z

Primjer 9-1: Rješenje

- Korak 4:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.65}{\sqrt{150}} = .21637159$$

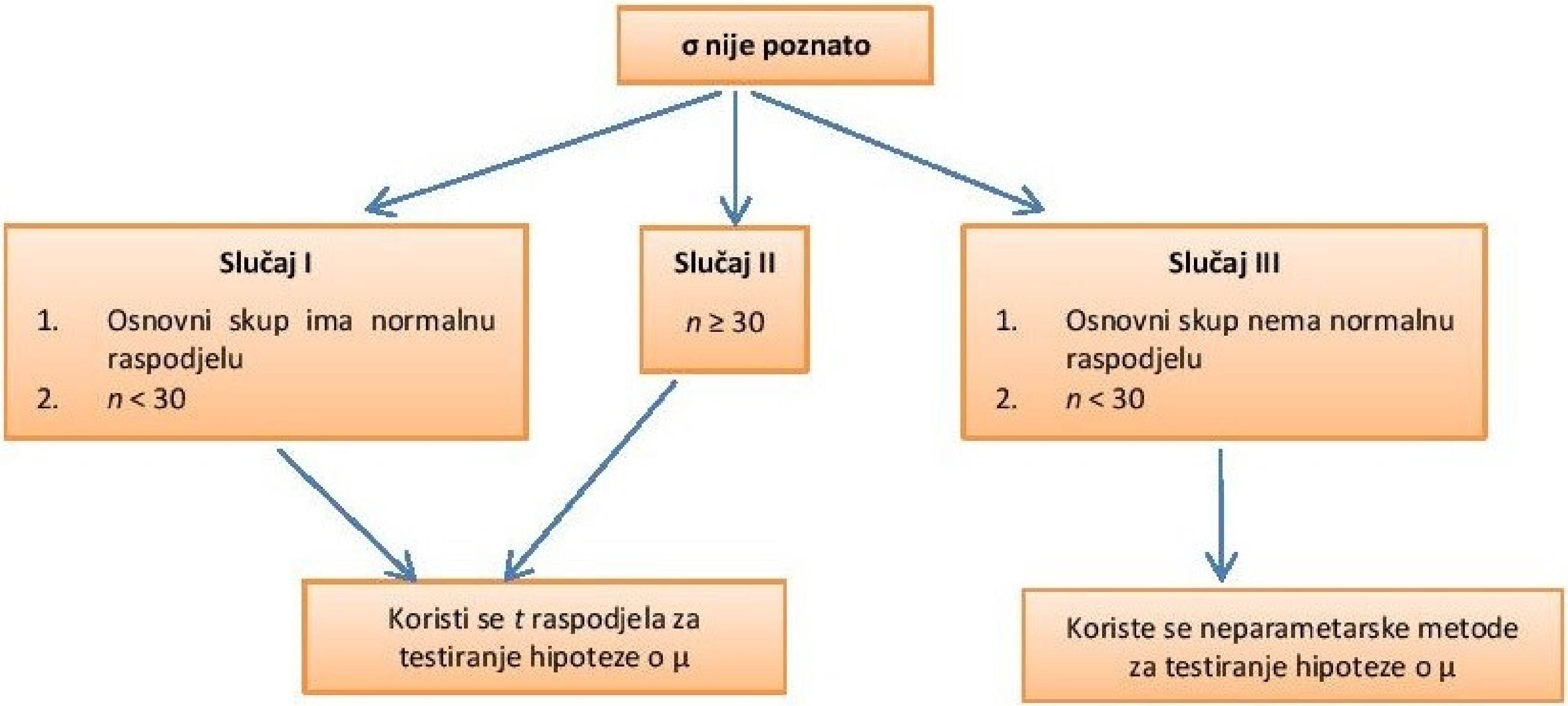
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{13.71 - 12.44}{.21637159} = 5.87$$

Primjer 9-1: Rješenje

- Korak 5: Ova vrijednost z = 5.87 je veća od kritične vrijednosti z = 2.33, i nalazi se u oblasti odbacivanja na desnom kraju krive raspodjele na slici 9.9. Slijedi da odbacujemo H_0 i zaključujemo da, na osnovu podataka o uzorku, prosječna dužina svih telefonskih razgovora nije jednaka 12.44 minuta.

9.3. TESTIRANJE HIPOTEZA O μ: σ NIJE POZNATA

Tri moguća slučaja



TESTIRANJE HIPOTEZA O μ: σ NIJE POZNATA

Statistika testa

Vrijednost ***statistike t testa*** za aritmetičku sredinu uzorka $\bar{x}$ izračunava se kao

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \; gdje \; je \; s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Vrijednost t izračunate za $\bar{x}$ primjenom ove formule se takođe naziva ***realizovana vrijednost statistike t testa***.

Pravila z testa hipoteza o μ: σ NIJE POZNATA

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Nulta hipoteza H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \geq \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \leq \mu_0$
Alternativna hipoteza H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
Kritična vrijednost	$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$	$-t_{\alpha,n-1}$	$t_{\alpha,n-1}$
Statistika testa	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$		
Pravilo odbacivanja H_0	$\lvert t \rvert > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$	$t < -t_{\alpha,n-1}$	$t > t_{\alpha,n-1}$
Oblast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Primjer 9-8

Rukovodstvo banke u Masačusetsu je uvijek brinulo o kvalitetu pruženih usluga. Sa starim kompjuterskim sistemom, bankarski službenik je mogao da usluži u prosjeku 22 klijenta na sat. Rukovodstvo je uočilo da je uz ovakvu brzinu pružanja usluga vrijeme čekanja klijenata predugo. Nedavno je rukovodstvo banke instaliralo novi kompjuterski sistem u banci očekujuči da će to povećati brzinu pružanja usluga i da će klijenti biti zadovoljniji zbog smanjenja vremena čekanja.

Primjer 9-8

Da bi se provjerilo da li je novi kompjuterski sistem efikasniji od starog, uprava banke je izabrala slučajan uzorak od 70 sati rada sa klijentima i ustanovila da je tokom ovog vremena prosječan broj klijenata kojima su bankarski službenici pružili usluge bilo 27 klijenata na sat, sa standardnom devijacijom 2.5. Testirajte na nivou značajnosti od 1%, da li je novi kompjuterski sistem efikasniji od starog?

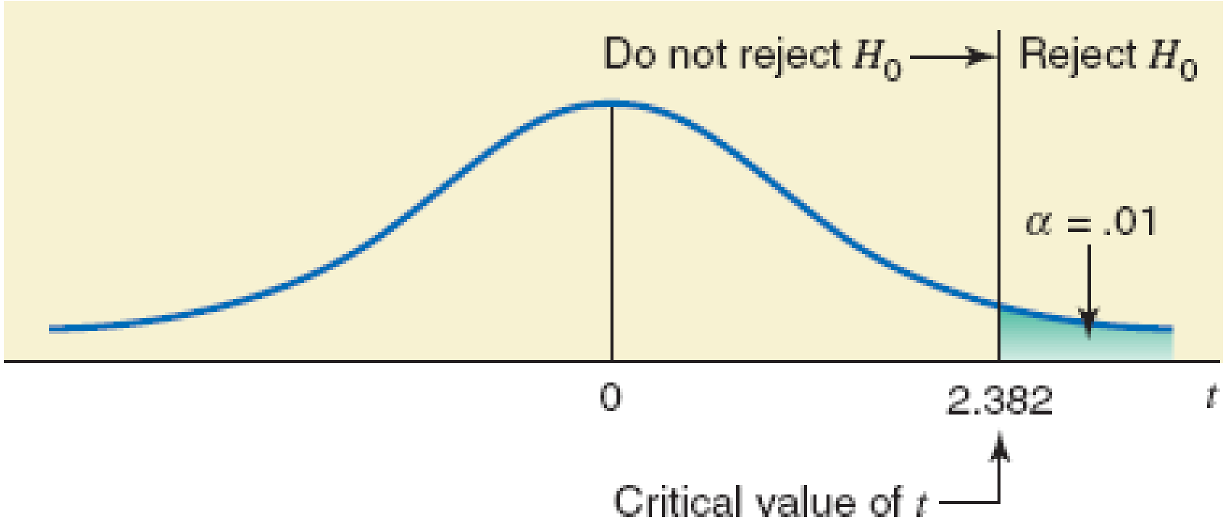
Primjer 9-8: Rješenje

- Korak 1: $H_0 : \mu = 22$
  $H_1 : \mu > 22$
- Korak 2: Standardna devijacija skupa σ nije poznata a uzorak je veliki (n > 30). Stoga koristimo t raspodjelu za test.

Primjer 9-8: Rješenje

- Korak 3: Nivo značajnosti = 0.01. Znak > u alternativnoj hipotezi ukazuje da je test desnostrani i da se oblast odbacivanja nalazi na desnom kraju.
- Površina na desnom kraju = α = 0.01
- $df = n - 1 = 70 - 1 = 69$
- Kritična vrijednost t za 69 df i površinu na desnom kraju od 0.01 je 2.382.

Slika 9.14


Do not reject H_0
Reject H_0
α = .01
0
2.382
t
Critical value of t

Primjer 9-8: Rješenje

- Korak 4: $$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{70}} = .29880715$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{27 - 22}{.29880715} = 16.733$$

Vrijednost statistike testa t = 16.733 je veća od kritične vrijednosti od t = 2.382, i nalazi se u oblasti odbacivanja. To znači da odbacujemo H_0. Zbog toga možemo zaključiti da je aritmetička sredina uzorka prevelika u poređenju sa hipotetičkom vrijednošću aritmetičke sredine osnovnog skupa, a razlika između njih ne može biti rezultat slučajnosti.

Testiranje hipoteza za μ korišćenjem *t* raspodjele

Šta se dešava ako je uzorak preveliki?

1. Koristiti kritične vrijednosti *t* iz poslednjeg reda (red ∞) Tablice V u Dodatku C.
2. Koristiti normalnu raspodjelu kao aproksimaciju *t* raspodjele.

TESTIRANJE HIPOTEZE O PROPORCIJI OSNOVNOG SKUPA: VELIKI UZORCI

Statistika testa

Statistika testa z za proporciju uzorka, $\hat{p}$, izračunava se kao

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} \; gdje \; je \; \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Vrijednost p u ovoj formuli je ona koja se koristi u nultoj hipotezi. Vrijednost q je jednaka 1-p. Vrijednost z koja se izračunava za $\hat{p}$ primjenom gore navedene formule naziva se realizovana vrijednost z.

Pravila z testa hipoteza o p: veliki uzorci

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Nulta hipoteza H_0	$p = p_0$	$p = p_0$ ili $p \geq p_0$	$p = p_0$ ili $p \leq p_0$
Alternativna hipoteza H_1	$p \neq p_0$	$p < p_0$	$p > p_0$
Kritična vrijednost	$z_{\frac{\alpha}{2}}$	$-z_\alpha$	z_α
Statistika testa	$z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$		
Pravilo odbacivanja H_0	$\lvert z \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_\alpha$	$z > z_\alpha$
Oblast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Primjer 9-11

Prema anketi „*Vožnja tokom rasijanosti*“ nacionalne kompanije za uzajamno osiguranje sprovedenoj u 2008. godini, 81% intervjuisanih vozača reklo je da su razgovarali na mobilnim telefonima tokom vožnje (*The New York Times*, 19. jul, 2009). Anketa je obuhvatila vozače starosti od 16 do 61 godina odabrane iz 48 država. Pretpostavimo da ovaj rezultat važi za populaciju svih takvih vozača u SAD-u u 2008. godini. U nedavnom slučajnom uzorku od 1600 vozača starih od 16 do 61 godina izabranih iz SAD-a, 83% reklo je da su razgovarali na mobilnim telefonima tokom vožnje.

Primjer 9-11

Koristeći nivo značajnosti od 5%, da li možete da zaključite da se sadašnji procenat ovakvih vozača koji su razgovarali na mobilnom telefonu tokom vožnje razlikuje od 81%.

Primjer 9-11: Rješenje

- Korak 1: $H_0 : p = 0.81$

  $H_1 : p \neq 0.81$

- Korak 2: da bismo provjerili da li je uzorak veliki, izračunavamo vrijednosti np i nq:

  $np = 1600(0.81) = 1296 > 5$

  $nq = 1600(0.19) = 304 > 5$

Prema tome, koristimo normalnu raspodjelu za test.

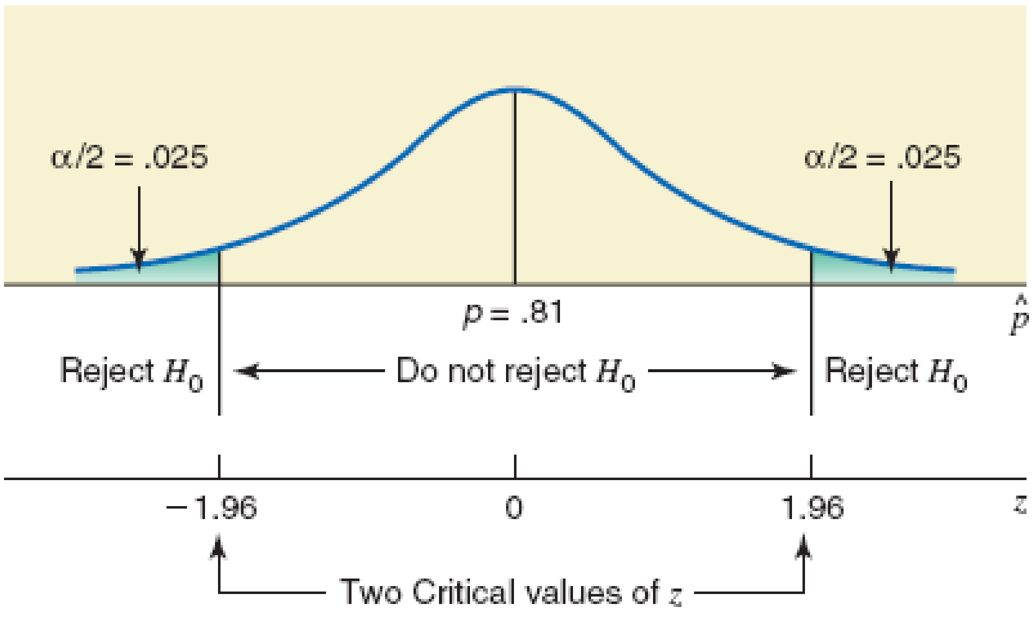
Primjer 9-11: Rješenje

- Korak 3: Znak ≠ u alternativnoj hipotezi ukazuje da je test dvostrani. Nivo značajnosti je 0.05. Dakle, ukupna površina dvije oblasti odbacivanja iznosi 0.05.

  Površina na svakom kraju = α / 2 = 0.05 / 2 = 0.025

  Kritične vrijednosti od z su -1.96 i 1.96.

Slika 9.17 Kritične vrijednosti od z



Primjer 9-11: Rješenje

- Korak 4:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.81)(.19)}{1600}} = .00980752$$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{.83 - .81}{.00980752} = 2.04$$

Primjer 9-11: Rješenje

- Korak 5: Vrijednost statistike testa z = 2.04 nalazi se u oblasti odbacivanja. Zbog toga odbacujemo H_0 i zaključujemo da se sadašnji procenat ovakvih vozača koji su razgovarali na mobilnom telefonu tokom vožnje razlikuje od 81%.